# COMPLÉMENT DÉMONSTRATION IMPEDENCES COMPLEXES

JEAN-MICHEL SALLESE

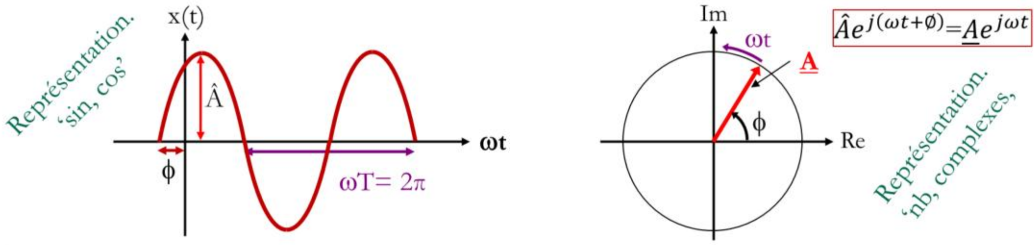
## SINUS ET PHASEURS

Base mathématique: $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\cdot\sin\alpha \quad j = \sqrt{-1}$

$$\hat{A}e^{j(\omega t+\phi)} = \hat{A}(\cos(\omega t+\phi)+j\sin(\omega t+\phi)) \quad \begin{cases} \hat{A}\cos(\omega t+\emptyset) = \mathrm{Re}\left(\hat{A}e^{j(\omega t+\emptyset)}\right) \\ \hat{A}\sin(\omega t+\emptyset) = \mathrm{Im}\left(\hat{A}e^{j(\omega t+\emptyset)}\right) \end{cases}$$

Un signal sinus d'amplitude Â, de phase initiale $\phi$ et de pulsation $\omega$ ($\hat{A}e^{j(\omega t+\emptyset)}$) peut être décrit par un phaseur complexe $\underline{A}$ d'amplitude Â et d'argument $\phi$ , $\underline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{\hat{A}e^{j\emptyset}}$ , tournant à la vitesse angulaire $\omega$: $\hat{A}e^{j(\omega t+\emptyset)} = \underline{A}e^{j\omega t}$.

$\hat{A}\cos(\omega t+\emptyset) = \mathrm{Re}\left(\underline{A}e^{j\omega t}\right) \qquad \hat{A}\sin(\omega t+\emptyset) = \mathrm{Im}\left(\underline{A}e^{j\omega t}\right)$

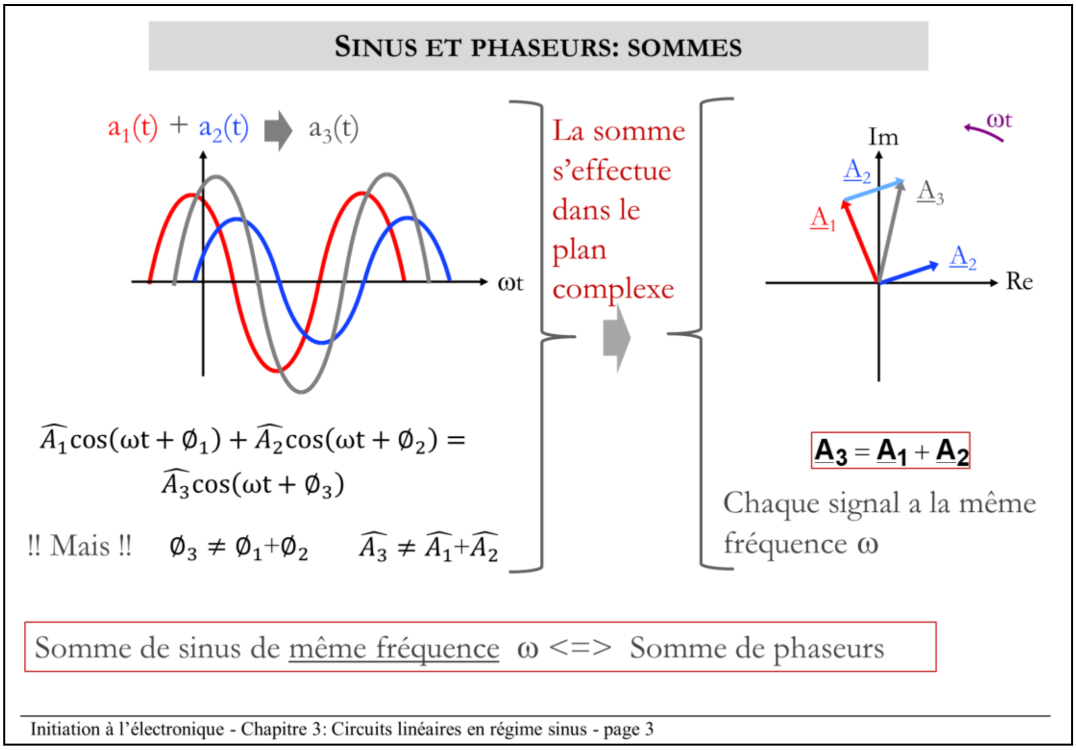



Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 2

La représentation du phaseur $\underline{A} = \hat{A}\exp(j\phi)$ est le nombre complexe qui représente le signal au temps initial (t=0).

Â indique l'amplitude (valeur de crête du sinus) et $\phi$ est la phase initiale du sinus lorsque t=0

Par convention le phaseur tourne dans le **sens anti-horaire** à la vitesse angulaire **ω**.



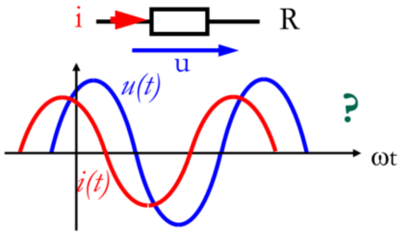

La vitesse angulaire ω est toujours dans le sens anti-horaire.

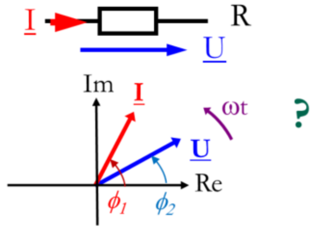
Rappel:

Additionner des phaseurs ou des nombres complexes revient à additionner les partie réelles entre elles, et les parties imaginaires entre elles.

**Attention, les 'phases' ne se somment pas !**

## DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUS: LA RÉSISTANCE




Excitation: $i(t) = \hat{I}\,sin(\omega t + \varphi_1)$ ➡ Réponse ? $u(t) = \hat{U}\,sin(\omega t + \varphi_2)$

$$u(t) = R\,i(t) = R\hat{I}sin(\omega t + \varphi_1) = R\,Im\left[\hat{I}e^{j(\omega t+\varphi_1)}\right] = Im\left[R\hat{I}e^{j(\omega t+\varphi_1)}\right]$$

$$= Im\left[R\underline{I}e^{j\omega t}\right] = \left(R\underline{I}e^{j\omega t} - R\underline{I}^{*}e^{-j\omega t}\right)/2j \qquad \left(\underline{I} = \hat{I}e^{j\varphi_1}\right)$$

Par ailleurs, la tension peut aussi s'écrire de façon générale (notons que les phases ne sont pas forcément identiques):

$$u(t) = Im\left[\hat{U}e^{j(\omega t+\varphi_2)}\right] = Im\left[\underline{U}e^{j\omega t}\right] = \left(\underline{U}e^{j\omega t} - \underline{U}^{*}e^{-j\omega t}\right)/2j \qquad \left(\underline{U} = \hat{U}e^{j\varphi_2}\right)$$

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 4

Nous allons établir une expression équivalente à la loi d'Ohm dans le cas d'une résistance soumise à une tension sinusoidale.

Dans l'exemple ci-dessus, le courant est donné. Il s'agit de trouver la tension u(t). Comme les variables sont des nombres complexes, il faudra déterminer à la fois le module et la phase (ici, U et $\phi_2$).

Remarque: on peut montrer que dans le cas de circuits dits 'linéaires', si l'excitation est périodique de fréquence angulaire ω, alors les réponses (en courant, tension, charge) seront également périodiques de même fréquence angulaire ω. C'est la raison pour laquelle la même fréquence angulaire est imposée à la tension u*(t)*.

Par contre, il peut exister une différence de phase entre ces signaux ($\phi_1$, $\phi_2$).

Nous verrons qu'une telle différence de phase va dépendre des composants et aussi de la fréquence d'excitation ω lorsque ces composants sont associés dans des circuits.

## Dipôles linéaires en régime sinus: La Résistance

L'égalité entre les expressions donne:

$$\left(R\underline{I}e^{j\omega t} - R\underline{I}^{*}e^{-j\omega t}\right) = \left(\underline{U}e^{j\omega t} - \underline{U}^{*}e^{-j\omega t}\right) \Rightarrow \left(R\underline{I} - \underline{U}\right)e^{j\omega t} = \left(R\underline{I}^{*} - \underline{U}^{*}\right)e^{-j\omega t}$$

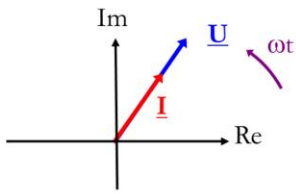
*Ces 2 expressions doivent être identiques quelque soit t, ce qui implique que les termes indépendants du temps doivent être nuls.*

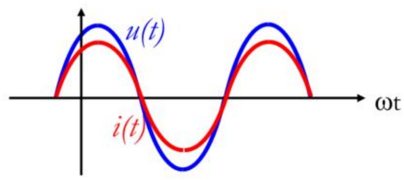
$$\boxed{\underline{U} = R\underline{I}}$$

La relation entre les phaseurs ne dépend pas de la fréquence pour la résistance

Pour la résistance, la relation entre courant et tension en régime sinusoidal est donc:

$$\underline{U} = R\underline{I} \qquad u(t) = \hat{U}\, sin(\omega t) \qquad i(t) = \frac{\hat{U}}{R}\, sin(\omega t)$$

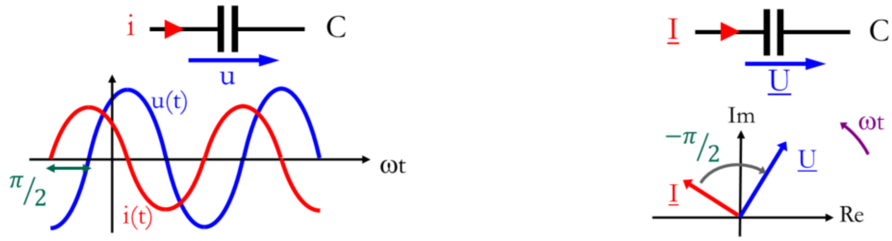



Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 5

Pour une résistance, le courant et la tension sont toujours en phase.

## DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUS
## LA CAPACITÉ




$$u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = \frac{1}{C}\int Im\left[\hat{I}e^{j(\omega t+\varphi_1)}\right]dt = \frac{1}{C}\,Im\int\left[\hat{I}e^{j(\omega t+\varphi_1)}\right]dt = Im\left(\frac{\underline{I}}{j\omega C}\,e^{j\omega t}\right)$$

$$u(t) = Im\left(\frac{\underline{I}}{j\omega C}\,e^{j\omega t}\right) = \left(\frac{\underline{I}}{j\omega C}\,e^{j\omega t} - \frac{j\underline{I}^*}{\omega C}\,e^{-j\omega t}\right)\frac{1}{2j}$$

*mais aussi:*

$$u(t) = Im\left[\hat{U}e^{j(\omega t+\varphi_2)}\right] = Im\left[\underline{U}e^{j\omega t}\right] = \left(\underline{U}e^{j\omega t} - \underline{U}^*e^{-j\omega t}\right)\frac{1}{2j}$$

$$\forall\, t \Rightarrow \boxed{\underline{U} = \frac{1}{j\omega C}\,\underline{I}}$$

$$\underline{U} = \frac{-j}{\omega C}\,\underline{I} = = \frac{e^{-j\pi/2}}{\omega C}\,\underline{I}$$



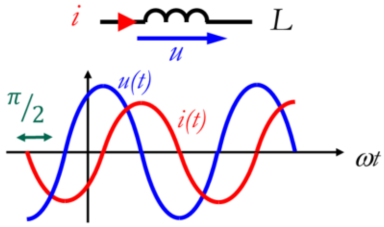
Dans une capacité, le phaseur courant et le phaseur tension ne sont plus en phase (contrairement à la résistance).

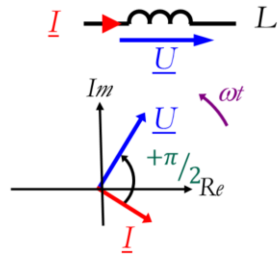
Un déphasage de -90 ° existe entre u et i.

Selon le plan complexe, on voit que 'le courant est en avance sur la tension'.

Ceci vient du fait que le courant est obtenu par dérivée temporelle de la tension.

## Dipôles linéaires en régime sinus
## L' Inductance




$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L\frac{d\,Im\left[\hat{I}e^{j(\omega t+\varphi_1)}\right]}{dt} = L\,Im\frac{d\left[\hat{I}e^{j(\omega t+\varphi_1)}\right]}{dt} = L\,Im\frac{d\left[\underline{I}e^{j\omega t}\right]}{dt} = Im\left[j\,\omega\,L\,\underline{I}e^{j\omega t}\right]$$

$$u(t) = Im\left(j\,\omega\,L\,\underline{I}e^{j\omega t}\right) = \left(j\,\omega\,L\,\underline{I}e^{j\omega t} + j\omega L\underline{I}^{*}e^{-j\omega t}\right)\frac{1}{2j}$$

*mais aussi:*

$$u(t) = Im\left[\hat{U}e^{j(\omega t+\varphi_2)}\right] = Im\left[\underline{U}e^{j\omega t}\right] = \left(\underline{U}e^{j\omega t} - \underline{U}^{*}e^{-j\omega t}\right)\frac{1}{2j}$$

$$\forall\, t \Rightarrow \boxed{\underline{U} = j\omega L\,\underline{I}}$$

$$\underline{U} = e^{j\pi/2}\omega L\underline{I}$$

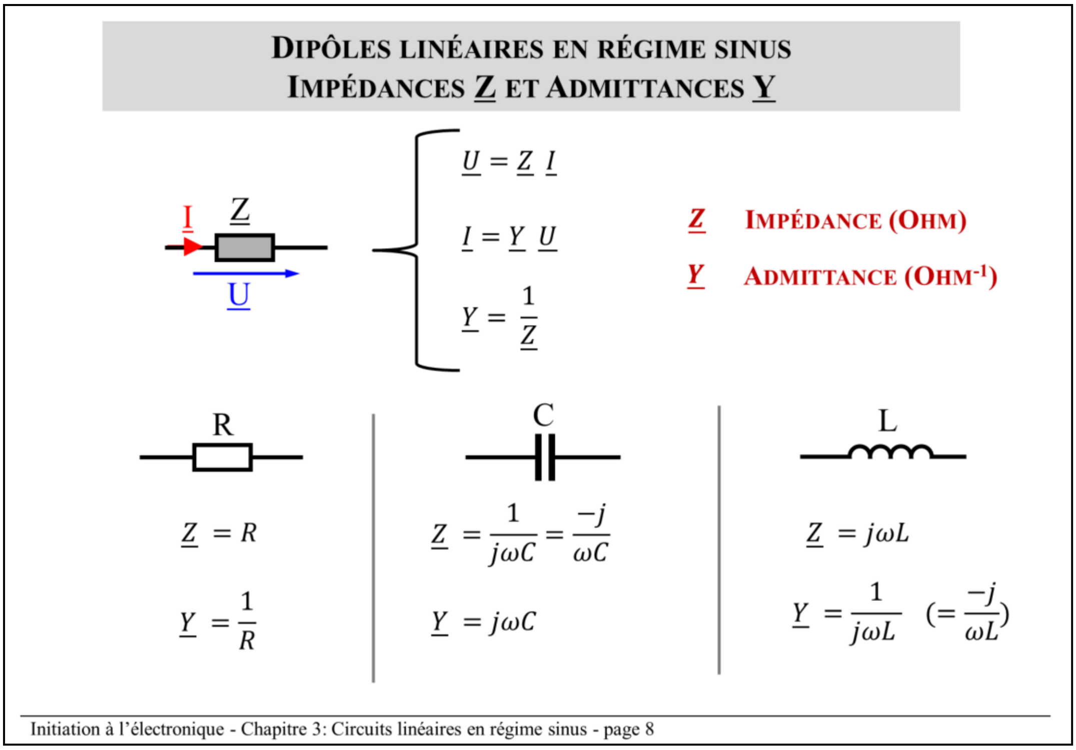
Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 7

Comme pour la capacité, dans une inductance, le phaseur courant et le phaseur tension ne sont plus en phase.

Cette fois, un déphasage de 90 ° existe entre u et i.

Selon le plan complexe, on voit que 'le courant est en retard sur la tension'.

Ici, c'est la tension qui s'obtient par la dérivée temporelle du courant.




En notation complexe, pour les trois types de dipôles linéaires passifs, la loi d'Ohm s'écrit en terme de phaseurs $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$.

Le paramètre $\underline{Z}$ est appelé impédance.

Son inverse $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ est appelé admittance.

L'impédance d'une résistance est réelle positive.

L'impédance d'une inductance est purement imaginaire positive.

L'impédance d'une capacité est purement imaginaire négative.